المحاضرة الأولى 2015 10 21

التمرين - ١ -

اكتب العدد العقدي • $z = 1 + i\sqrt{3}$

• $z = 1 - \cos\theta + i\sin\theta$

بالشكل القطبي.

الحل:

• $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

لدينا

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + \pi k$$

من أجل $k=0$ نجد أن $\theta = \frac{\pi}{3}$

ومنه فإن الشكل القطبي هو

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

• $r = \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2}$

$$= \sqrt{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

$$= \sqrt{2(1-\cos\theta)}$$

$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$

$$= \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}} = 2\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$= \cos\frac{\theta}{2}$

$= \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2})$

أي أن $\quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$

ومنه فإن $\quad z = 2\sin\frac{\theta}{2}\,[\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2})]$

التمرين - 2 -

أثبت أن $\quad \sqrt{2}\,|z| \geq |Re\, z| + |Im\, z|$

الحل:

نعلم أن $\quad |z|^2 = (Re\, z)^2 + (Im\, z)^2$

$(\star) \quad = |Re\, z|^2 + |Im\, z|^2$

إذا كان $\quad z = x + iy$

$\Rightarrow \quad z^2 = x^2 - y^2 + i\,2xy$

$|z^2| = \sqrt{(x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2}$

$= \sqrt{x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2}$

$= \sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$

$|z^n| = |z|^n \quad = \sqrt{(x^2+y^2)^2} = x^2 + y^2 = |z|^2$

لكن $\quad |Im\, z| = 2xy \quad Im\, z \leq |Im\, z| \leq |z|$

أي أن $\quad |2xy| \leq |z|^2$

أي أن $\quad 2|x|.|y| \leq |z|^2 \quad (\star\star)$

بالاستفادة من $(\star)$ $(\star\star)$ نجد أن

$2|z|^2 \geq |Re\, z|^2 + 2|Re\, z||Im\, z| + |Im\, z|^2$

$= (|Re\, z| + |Im\, z|)^2$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين نحصل على المساواة المطلوبة.

/ /

التمرين -3-

بفرض أن R مقدار ثابت موجب وأن z عدد عقدي معين. أثبت أن معادلة الدائرة التي نصف قطرها R ومركزها النقطة المناظرة للعدد العقدي $-z_0$ تكون على الصورة

$$|z|^2+2Re(z.\bar{z}_0)+|z_0|^2+R^2$$

الحل:

نفرض أن $z_0=x_0+iy_0$ عندئذٍ $-z_0=-x_0-iy_0$

أي أن النقطة المناظرة للعدد العقدي $-z_0$ هي $(-x_0,-y_0)$

وبالتالي فإن معادلة الدائرة التي مركزها $(-x_0,-y_0)$ ونصف قطرها R

فتكون على الشكل $(x+x_0)^2+(y+y_0)^2=R^2$

$$x^2+2x_0x+x_0^2+y^2+2yy_0+y_0^2=R^2$$

$$x^2+y^2+2xx_0+2yy_0+x_0^2+y_0^2=R^2$$

وإذا كان $z=x+iy$ فإن $|z|^2=x^2+y^2$

$$|z_0|^2=x_0^2+y_0^2$$

$$z.\bar{z}_0=(x+iy).(\overline{x_0+iy_0})$$

$$=(x+iy).(x_0-iy_0)$$

$$=xx_0+yy_0+i(-xy_0+yx_0)$$

أي أن $Re(z.\bar{z}_0)=xx_0+yy_0$

وبالتالي فإن معادلة الدائرة تكتب على الصورة

$$|z|^2+2Re(z.\bar{z}_0)+|z_0|^2=R^2$$

التمرين -4-

باستخدام الصورة القطبية أثبت أن

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

نكتب الطرف الأيسر بالشكل القطبي ونكتب الطرف الأيمن أيضاً بالشكل القطبي.

Scanned by CamScanner

الحل:

$$\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i} = \frac{(1+\sqrt{3}\,i)(1+\sqrt{3}\,i)}{(1-\sqrt{3}\,i)(1+\sqrt{3}\,i)}$$

$z\cdot\bar{z} = |z|^2$

$$= \frac{1+2\sqrt{3}\,i-3}{4}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$$

$-\tan\frac{\pi}{3} = \tan\frac{2\pi}{3}$

$-\tan\frac{\pi}{3} = \tan(\pi-\frac{\pi}{3})$

$$r = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \Rightarrow \tan\theta = -\tan\frac{\pi}{3}$$

$$= \tan\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}\right)^{10} = \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{10}$$

$$= \cos\frac{20\pi}{3} + i\sin\frac{20\pi}{3}$$

- $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

نعلم بأن $z_1 = z_2$ إذا وفقط إذا كان

$$r_1 = r_2 \wedge \theta_1 = \theta_2 + 2\pi k$$

$$r_1 = r_2 = 1$$

أما

$$\theta_1 = \frac{20\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 6\pi$$

$$= \frac{2\pi}{3} + 3(2\pi)$$

$$= \theta_2 + 3(2\pi)$$

التمرين -5-

اكتب العدد العقدي $\frac{e^{1+i\frac{\pi}{2}}}{e^{-1+i3\pi}}$ بالشكل $a+ib$

الحل:

$$\frac{e^{1+i\frac{\pi}{2}}}{e^{-1+i3\pi}} = \frac{e\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{-1}\cdot e^{i3\pi}} = e^2\, e^{i(\frac{\pi}{3}-3\pi)}$$

$$= e^{2} \cdot e^{i(-\frac{5\pi}{2})}$$

$$= e^{2}[\cos(-\frac{5\pi}{2}) + i\sin(-\frac{5\pi}{2})]$$

$$= e^{2}[\cos(-2\pi - \frac{\pi}{2}) + i\sin(-2\pi - \frac{\pi}{2})]$$

$$= e^{2}[\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})]$$

$$= e^{2}[0 - i] = -ie^{2}$$

أي أن $a = 0 \wedge b = -e^{2}$

التمرين -6-

عين المحل الهندسي لمجموعة النقاط التي تحقق المعادلة $|Z - i| = 2$

الحل:

نفرض أن $Z = x + iy$

$$|x + iy - i| = 2$$

$$|x + i(y - 1)| = 2$$

$$\sqrt{x^{2} + (y - 1)^{2}} = 2$$

$$x^{2} + (y - 1)^{2} = 2$$

وهي معادلة من الشكل $(x - x_0)^{2} + (y - y_0)^{2} = R^{2}$

أي معادلة دائرة مركزها $(0, 1)$ ونصف قطرها $R = 2$

دورة التمرين -7-

عين المحل الهندسي لمجموعة النقاط التي تحقق المعادلة

$$|Z - 3| + |Z + 3| = 4$$

الحل:

نفرض أن $Z = x + iy$

$$|x + iy - 3| + |x + iy + 3| = 4$$

$$|x - 3 + iy| + |x + 3 + iy| = 4$$

$$\sqrt{(x - 3)^{2} + y^{2}} + \sqrt{(x + 3)^{2} + y^{2}} = 4$$

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2} = 4-\sqrt{(x+3)^2+y^2}$$

$$(x-3)^2+y^2 = 16-8\sqrt{(x+3)^2+y^2}+(x+3)^2+y^2$$

$$x^2-6x+9+y^2 = 16-8\sqrt{(x+3)^2+y^2}+x^2+6x+9+y^2$$

$$-12x-16 = -8\sqrt{(x+3)^2+y^2}$$

$$3x+4 = 2\sqrt{(x+3)^2+y^2}$$

$$(3x+4)^2 = 4[(x+3)^2+y^2]$$

$$9x^2+24x+16 = 4[x^2+6x+9+y^2] = 4x^2+24x+36+4y^2$$

$$5x^2-4y^2 = 20$$

أي أن
$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5} = 1$$

وهي معادلة قطع زائد

التمرين -8-

أوجد حلول المعادلة
$$z^2+2z+2=0$$

الحل:

$$\Delta = B^2-4A.C$$

$$= 4-8 = -4 = 4i^2$$

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$z_1 = \frac{-2+2i}{2} = -1+i \quad ، \quad z_2 = \frac{-2-2i}{2} = -1-i$$

التمرين -9-

أوجد حلول المعادلة
$$z^2+(2i-3)z+5-i=0$$

الحل:

$$\Delta = B^2-4A.C$$

$$=(-3+2i)^2-4(5-i)$$

$$= 9-12i-4-20+4i$$

Scanned by CamScanner

$= -15 - 8i$

$\sqrt{\Delta} = ?$

لنوجد الآن الجذران التربيعيان للعدد العقدي $-15-8i$

نفرض أن $z = x+iy$ هو أحد الجذران عندئذٍ $z^2 = -15-8i$

أي أن $x^2-y^2+i2xy=-15-8i$

ومنه فإن $x^2-y^2=-15 \quad (1)$

$2xy=-8 \Rightarrow y = \frac{-4}{x}$

نعوض في (1)

$x^2 - \frac{16}{x^2} = -15$

$x^4+15x^2-16=0$

هي من الشكل $Z^2+2bZ+c=0$ حيث $Z=x^2$

$(x^2-1)(x^2+16)=0$

إما $x^2+16=0 \Rightarrow x^2=-16$ مرفوض

أو $x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1$

أي أن $x=1$ أو $x=-1$

عندما $x=1$ نجد أن $y=-4$ وعندما $x=-1$ نجد أن $y=4$

أي أن $\sqrt{\Delta}=-1+4i$ أو $\sqrt{\Delta}=1-4i$

$z_1 = \frac{(-3+2i)+1-4i}{2} = 2-3i$

$z_2 = \frac{-(-3+2i)+(-1+4i)}{2} = 1+i$

هما جذرا المعادلة